



مشاهده‌ها و مکاشفه‌ها!

مشاهده‌هایی دربارهٔ مسئله‌ای بامزه

کلیدواژه‌ها: مسئله، مشاهده، مکاشفه، استدلال

اما در مسئلهٔ ما، ده عدد دیگر مشخص شده‌اند. پس پاسخ مسئلهٔ ما، پنج عدد -7 ، -6 ، 2 ، $4/3$ ، 2 نیست. پس چه عددی است؟ توجه کنید که در صورت مسئله، از این که عددها مثبت‌اند یا منفی حرفی زده نشده است، و همین‌طور نمی‌دانیم این اعداد صحیح‌اند یا نه، و حتی گفته نشده است که نباید بین «آن پنج عدد»، عددی تکراری باشد.



مسئله

می‌خواهیم دربارهٔ این مسئله صحبت کنیم: شخصی پنج عدد انتخاب کرده است. این عددها را جفت‌جفت با هم جمع کرده و حاصل جمع‌ها برابر این ده عدد شده است:

15 ، 13 ، 11 ، 9 ، 8 ، 6 ، 4 ، 2 ، 0

پنج عددی را که این شخص انتخاب کرده است، بیابید.

بگذارید مسئله را با مثالی توضیح دهیم؛ مثلاً پنج عدد -7 ، -6 ، 2 ، $4/3$ ، 2 را در نظر بگیرید. این عددها را جفت‌جفت جمع کنیم:

$(-7) + (-6) = -13$	$(-7) + 2 = -5$	$(-7) + 4/3 = -2/7$
$(-7) + 2 = -5$	$(-6) + 2 = -4$	$(-6) + 4/3 = -1/7$
$(-6) + 2 = -4$	$2 + 4/3 = 6/3$	$2 + 2 = 4$
$4/3 + 2 = 6/3$		

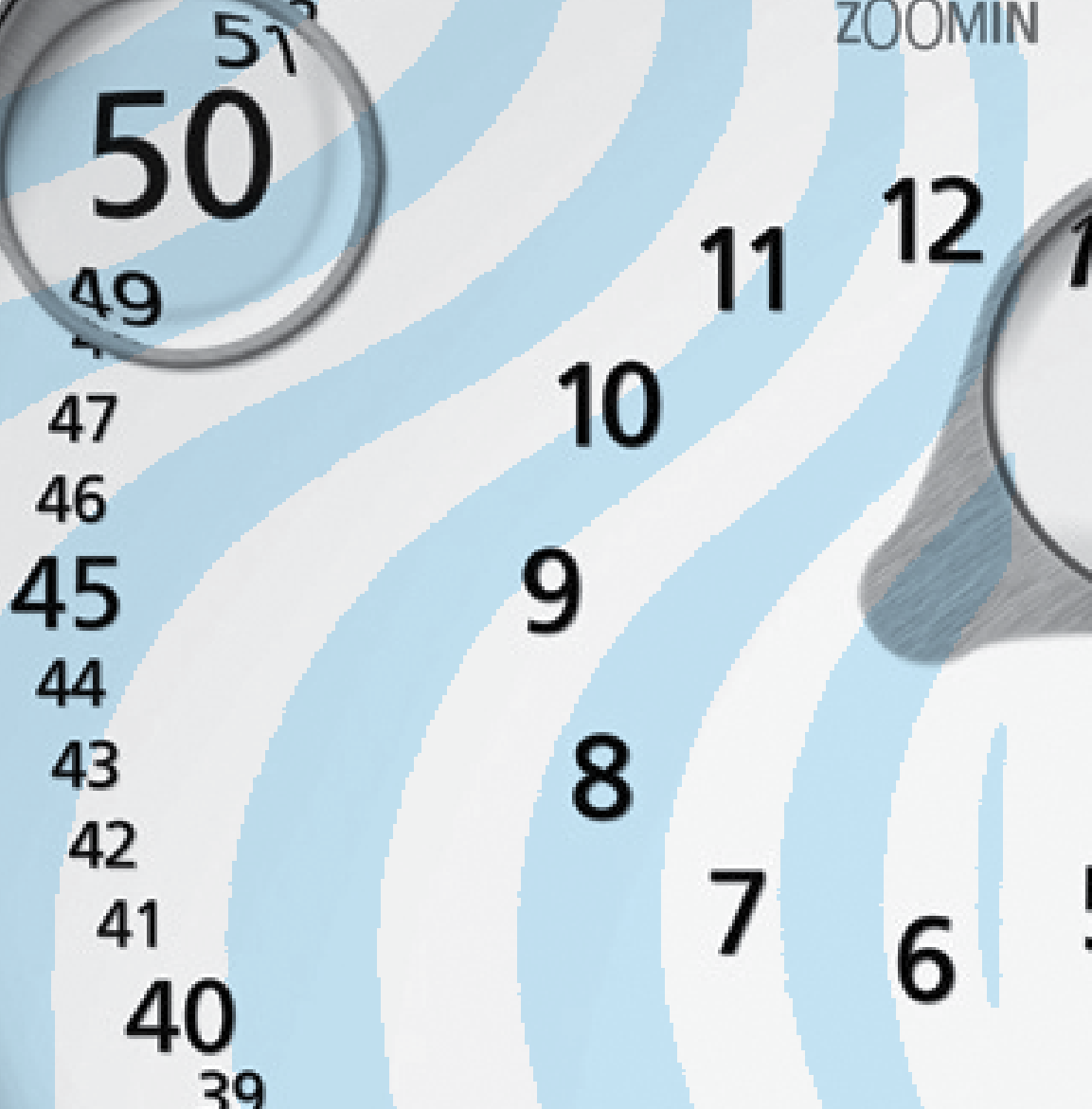
پس این ده عدد به دست می‌آیند:

13 ، 5 ، $2/7$ ، $1/7$ ، 4 ، 4 ، $6/3$ ، $6/3$ ، 4 ، 4

با بررسی مسئله، می‌توانیم به نکات و ویژگی‌های جالب و مفیدی دربارهٔ آن پنج عدد پی ببریم که یافتن آن عددها را آسان‌تر می‌کنند. بیایید این نکات و ویژگی‌ها را «مشاهده» بنامیم. قبل از این که مشاهده‌های ما را بخوانید، خودتان به مسئله فکر کنید و مشاهده‌هایتان را بنویسید، و سعی کنید به کمک آنها مسئله را حل کنید.

مشاهده‌ها

و اما مشاهده‌های ما؛ اگر بعضی از این مشاهده‌ها را کنار هم بگذاریم، با اطمینان می‌توانیم «آن پنج عدد» را بیابیم. بعد از خواندن مشاهده‌ها، برگردید و بگویید با کدام مشاهده‌ها می‌توانیم «آن پنج عدد» را پیدا کنیم. در انتهای مقاله، به این سؤال پاسخ داده‌ایم. هر یک از مشاهده‌های ما چرا درست است؟ شما بگویید. البته ما هم دلایل خودمان را می‌نویسیم. دقت کنید که بعضی مشاهده‌ها به یکدیگر مربوط‌اند. مثلاً ممکن است وقتی می‌خواهیم دلیل بیاوریم که مشاهده ۴ درست است، از مشاهده ۳ کمک بگیریم، یا از مشاهده ۵ البته نباید استدلال‌های دوری^۱ داشته باشیم، مثلاً نباید



خلاصه اینکه، حاصل جمع «آن ده عدد»، برابر است با چهار برابر حاصل جمع «آن پنج عدد».

حالا از آنچه ثابت کرده‌ایم، استفاده می‌کنیم: حاصل جمع ده عدد ۰، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ برابر است با ۷۲. پس حاصل جمع «آن پنج عدد»ی که انتخاب شده‌اند برابر است با $72 \div 4$ که مساوی است با ۱۸.

مشاهده ۲. بین «آن پنج عدد»، عدد تکراری وجود ندارد.

فرض کنید «آن پنج عدد»، a, b, c, d و d بودند. پس بین حاصل جمع‌ها، باید هریک از $a+d, b+d, c+d$ تکرار می‌شدند. اما در بین «آن ده عدد»، فقط عدد ۴ تکرار شده است. پس بین «آن پنج عدد»، عدد تکراری وجود ندارد.

مشاهده ۳. بین «آن پنج عدد»، عددی و قرینه آن عدد وجود دارند.

در بین «آن ده عدد»، صفر وجود دارد. صفر برابر حاصل جمع دو تا صفر است، و نیز حاصل جمع هر عددی با قرینه‌اش. بنابراین مشاهده ۲، دو تا صفر در بین «آن پنج عدد» وجود ندارد. پس در بین «آن پنج عدد»، عددی و قرینه‌اش وجود دارند.

مشاهده ۴. عدد صفر هیچ یک از «آن پنج عدد» نیست. بنابراین مشاهده ۳، حتماً عددی منفی بین «آن پنج عدد» وجود دارد. اگر عدد صفر یکی دیگر از «آن پنج عدد» می‌بود، آنگاه حاصل جمعش با آن عدد منفی، عددی منفی می‌شد. اما بین «آن ده عدد»، هیچ عدد منفی‌ای وجود ندارد. پس صفر در بین «آن پنج عدد» نیست.

مشاهده ۵. در بین «آن پنج عدد»، فقط یک عدد منفی وجود دارد و چهار عدد دیگر، مثبت‌اند.

بنابر مشاهده ۳، بین «آن پنج عدد» عددی منفی وجود دارد. اگر عدد منفی دیگری هم وجود می‌داشت، حاصل جمع این دو عدد منفی، عددی منفی می‌شد. اما در بین «آن ده عدد»، هیچ عدد منفی‌ای وجود ندارد. پس در بین «آن پنج عدد» فقط یک عدد منفی وجود دارد. هیچ یک از چهار عدد دیگر هم بنابر مشاهده ۴، صفر نیستند. پس از بین «آن پنج عدد»، یکی منفی و چهار تا مثبت است.

همزمان برای اثبات درستی مشاهده ۴ از مشاهده ۵ کمک بگیریم و برعکس برای اثبات درستی مشاهده ۵ از مشاهده ۴ استفاده کنیم! در مشاهده‌ها هر جا گفته‌ایم «آن پنج عدد»، منظورمان «آن پنج عدد»ی است که در مسئله به دنبالشانیم و هر جا گفته‌ایم «آن ده عدد»، منظورمان عددهای داده شده در مسئله، یعنی ۰، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ است.

مشاهده ۱. حاصل جمع «آن پنج عدد» برابر است با ۱۸.
مشاهده ۲. بین «آن پنج عدد»، عدد تکراری وجود ندارد.
مشاهده ۳. بین «آن پنج عدد»، عددی و قرینه آن عدد وجود دارند.

مشاهده ۴. عدد صفر هیچ یک از «آن پنج عدد» نیست.
مشاهده ۵. در بین «آن پنج عدد»، فقط یک عدد منفی وجود دارد و چهار عدد دیگر، مثبت‌اند.

مشاهده ۶. هریک از «آن پنج عدد»، عددی صحیح است.
مشاهده ۷. هیچ یک از «آن پنج عدد»، از ۱۴ بزرگ‌تر نیست.
مشاهده ۸. هیچ یک از «آن پنج عدد»، از ۱۴- کوچک‌تر نیست.

مشاهده ۹. چهارتا از «آن پنج عدد»، فردند و عدد دیگر زوج است.

مشاهده ۱۰. عدد منفی‌ای که در بین «آن پنج عدد»، وجود دارد، فرد است.^۲

مشاهده ۱۱. عددهای فرد در بین «آن پنج عدد»، چهار عدد فرد پشت سر هم هستند.

اثبات مشاهده‌ها

اکنون درستی مشاهده‌ها را ثابت می‌کنیم.

مشاهده ۱. حاصل جمع «آن پنج عدد» برابر است با ۱۸. ابتدا ثابت می‌کنیم که حاصل جمع «آن ده عدد»، برابر است با چهار برابر حاصل جمع «آن پنج عدد».

اثبات. اگر «آن ده عدد» a, b, c, d, e باشند، حاصل جمع جفت‌جفت آنها این ده عدد می‌شود:

$$b+c, a+e, a+d, a+c, a+b \\ d+e, c+e, c+d, b+e, b+d$$

(البته شاید با ترکیبی دیگر). این ده عدد را جمع می‌زنیم. حاصل را اگر ساده کنیم، می‌توانیم به این شکل بنویسیم:

$$4a + 4b + 4c + 4d + 4e$$

که مساوی است با چهار برابر $a+b+c+d+e$.

مشاهده ۶. هریک از «آن پنج عدد»، عددی صحیح است.

ابتدا توجه می‌کنیم که هریک از «آن پنج عدد»، با صحیح است یا به صورت $W/5$ است.

برای راحتی، از اثبات دقیق صرف‌نظر می‌کنیم، و با مثال روشن می‌کنیم که اثبات دقیق چطور باید بیان شود.

مثال. اگر یکی از عددها برابر $3/439$ بود، آنگاه هریک از سه عدد مثبت دیگر، باید به شکل $W/561$ می‌بودند؛ زیرا بنابر فرض مسئله، می‌دانیم که حاصل جمع جفت جفت «آن پنج عدد» قرار است عددهایی صحیح شوند و در نتیجه حاصل جمع هریک با $3/439$ باید عددی صحیح شود. اما حاصل جمع هیچ جفت عدد مثبتی به شکل $W/561$ ، عددی صحیح نمی‌شود، که با فرض مسئله تناقض دارد.

همین‌طور، با استدلالی مشابه معلوم می‌شود که اگر مثلاً عدد $5/913$ بین «آن پنج عدد» می‌بود، هریک از چهار عدد دیگر (که می‌دانیم مثبت‌اند) باید به شکل $W/913$ می‌بودند، که جمع هیچ جفت عدد مثبت به این شکل، عددی صحیح نمی‌شود.

اگر عددهایمان بعد از ممیز رقم‌های دیگری هم داشته باشند، همین مشکلات پیش می‌آید مگر آن که همگی به شکل $W/5$ باشند.

اگر استدلال بالا را دوباره بخوانید، متوجه می‌شوید که اگر عددی به شکل $W/5$ در بین «آن پنج عدد» باشد، همگی آنها باید به شکل $W/5$ باشند. سخت نیست دلیل بیاورید که جمع یک عدد منفی به شکل $W/5$ با چهار عدد مثبت به شکل $W/5$ هیچ‌گاه عددی صحیح نمی‌شود؛ در حالی که بنابر مشاهده ۱، باید برابر ۱۸ شود.

مشاهده ۷. هیچ‌یک از «آن پنج عدد»، از ۱۴ بزرگ‌تر نیست.

بنابر مشاهده ۶، هریک از «آن پنج عدد»، صحیح است. بزرگ‌ترین این اعداد را m بنامید. بزرگ‌ترین عدد بعد از m را در بین «آن پنج عدد»، n در نظر بگیرید. با توجه به مشاهده ۵، این عدد هم مثبت است. $m+n$ برابر کدام‌یک از «آن ده عدد» است؟ برابر ۱۵. اگر جمع دو عدد، صحیح مثبت برابر ۱۵ شود، نتیجه می‌گیریم هیچ‌یک از آنها از ۱۴ بزرگ‌تر نیست.

مشاهده ۸. هیچ‌یک از «آن پنج عدد»، از ۱۴ کوچک‌تر نیست.

بنابر مشاهده ۷، بیشترین عدد بین «آن پنج عدد»، از ۱۴ بیشتر نیست. اگر یکی از «آن پنج عدد» از ۱۴- کمتر باشد، حاصل جمع این دو عدد، عددی منفی خواهد شد. اما در بین «آن ده عدد»، عددی منفی وجود ندارد. پس هیچ‌یک از «آن پنج عدد» از ۱۴- کمتر نیست.

مشاهده ۹. چهارتا از «آن پنج عدد»، فردند و عدد دیگر زوج است.

بنابر مشاهده ۶، می‌دانیم که «آن پنج عدد»، عددهایی صحیح‌اند. اکنون حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم، که «آن پنج عدد» ما از نظر فرد و زوج بودن، چگونه‌اند:

* پنج تا زوج

«آن پنج عدد» ما این‌گونه نیستند؛ زیرا هر دو تا عدد زوجی را که با هم جمع می‌کنیم، حاصل زوج می‌شود اما در بین «آن ده عدد»، تعدادی عدد فرد هم داریم.



* پنج تا فرد

«آن پنج عدد» این گونه نیستند؛ زیرا هر دو عدد فردی را که با هم جمع کنیم، حاصل زوج می شود اما در بین «آن ده عدد»، تعدادی عدد فرد هم داریم.

به روشی دیگر هم می شد استدلال کرد: حاصل جمع پنج عدد فرد، عددی فرد است اما بنا بر مشاهده ۱، حاصل جمع «آن پنج عدد» برابر ۱۸ شده است که عددی زوج است.

* سه تا فرد و دو تا زوج

اگر «آن پنج عدد» چنین می بودند، حاصل جمع همه آنها عددی فرد می شد، در حالی که بنا بر مشاهده ۱، حاصل جمع «آن پنج عدد» برابر ۱۸ شده است که عددی زوج است.

* سه تا زوج و دو تا فرد

اگر «آن پنج عدد» چنین می بودند، در بین «آن ده عدد» باید چهار عدد زوج می داشتیم؛ (زیرا حاصل جمع دو عدد فرد با هم زوج می شود، و حاصل جمع دو عدد زوج با هم نیز زوج می شود). اما در بین «آن ده عدد»، شش عدد زوج داریم.

* چهار تا زوج و یکی فرد

اگر «آن پنج عدد» چنین می بودند، حاصل جمع همه آنها عددی فرد می شد، در حالی که بنا بر مشاهده ۱، حاصل جمع این «آن پنج عدد» برابر ۱۸ شده است که عددی زوج است.

* چهار تا فرد و یکی زوج

«آن پنج عدد» چنین اند؛ زیرا ثابت کردیم بقیه حالات درست نیستند.

مشاهده ۱۰. عدد منفی ای که در بین «آن پنج عدد»، وجود دارد، فرد است.

بنا بر مشاهده ۳، عددی منفی و قرینه اش در بین «آن پنج عدد» وجود دارد. اگر آن عدد منفی زوج می بود، قرینه اش هم زوج می شد. پس دست کم دو عدد زوج بین «آن پنج عدد» می داشتیم؛ بنا بر مشاهده ۹، فقط یک عدد زوج داریم. پس آن عدد منفی فرد است.

مشاهده ۱۱. عددهای فرد در بین «آن پنج عدد»، چهار عدد فرد پشت سر هم هستند.

بنا بر مشاهده ۹، چهار تا از «آن پنج عدد» فردند و عدد دیگر زوج است. عددهای فرد در بین «آن ده عدد» (یعنی ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵) چهار عدد فرد پشت سر هم اند. فقط حاصل جمع عددی فرد با عددی زوج، عددی فرد می شود. پس هر یک از ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ به این شکل حاصل می شوند که یکی از چهار عدد فرد در بین آن پنج عدد با پنجمین عدد (که زوج است) جمع می شود. پس عددهای فرد در بین «آن پنج عدد»، چهار عدد فرد پشت سر هم هستند.

سخن آخر

همان طور که قبلاً گفتیم، با استفاده از بعضی از این مشاهدات می توانیم «آن پنج عدد» را به راحتی پیدا کنیم: مشاهدات ۵، ۹، ۱۰ و ۱۱.

راستی، مسئله این مقاله را از این صفحه اینترنتی پیدا کردیم:

<http://nrich.maths.org/481>

پی نوشتها

۱. درباره استدلال های دوری، «توضیحی درباره مقاله «این را که از قبل می دانستیم» را در رشد برهان ریاضی راهنمایی، شماره ۶۰ بخوانید.
 ۲. عددهای صحیح منفی هم، مانند عددهای طبیعی به دو دسته زوج و فرد تقسیم می شوند.
- ۱-، ۳-، ۵-، ۷- فردند و ۲-، ۴-، ۶-، ۸- زوج اند.

